

Estimation fréquentielle bidimensionnelle par la nouvelle méthode à haute résolution ESPRIT-2D

Stéphanie Rouquette et Mohamed Najim

Equipe Signal et Image de l'ENSERB et GDR-ISIS, CNRS
BP 99, 33402 Talence Cedex, France

RÉSUMÉ

Cet article porte sur l'analyse spectrale de signaux bidimensionnels (ou images). Nous proposons une nouvelle méthode à haute résolution appelée ESPRIT-2D. Cette méthode estime de manière analogue à la méthode ACMP [1] les composantes fréquentielles relatives à chacune des dimensions sans qu'il y ait besoin d'étape de reformation des paires. La méthode ESPRIT-2D utilise pour cela la propriété d'invariance par translation du sous-espace signal associé à chaque dimension, comme la méthode MEMP [2]. Elle exploite également une relation supplémentaire afin d'obtenir directement les couples fréquentiels.

ABSTRACT

This paper deals with spectral analysis of two-dimensional signals (or images). We propose in this paper a new high resolution method we call ESPRIT-2D. This method estimates as the ACMP method [1] the frequency components in both dimensions without additional operations to pair them. The ESPRIT-2D method exploits the shift-invariance structure of the signal subspace related to each dimension, as the MEMP method [2]. This method considers too an additional relation to compute directly the frequency pairs.

1 Introduction

De nombreuses applications sont concernées par la localisation des composantes à bande étroite de signaux bidimensionnels (2D). A titre d'exemple, nous pouvons citer les applications radar, sonar et télécommunications.

Un certain nombre de méthodes paramétriques ont déjà été développées pour effectuer une analyse à haute résolution de signaux 2D. La méthode MEMP est une extension de la méthode ESPRIT [3] qui est utilisée pour l'analyse de signaux monodimensionnels (1D). Cette dernière exploite la propriété d'invariance par translation du sous-espace signal pour estimer les fréquences. La méthode MEMP estime successivement les fréquences relatives à chacun des deux axes définissant le plan fréquentiel. L'analyse haute résolution s'achève ensuite par une phase de reformation des paires fréquentielles. La méthode ACMP utilise quant à elle l'image de façon matricielle pour estimer les composantes fréquentielles de chaque dimension de manière ordonnée, ce qui veut dire que nous obtenons directement les couples fréquentiels. Cette méthode s'avère un peu moins précise que la méthode MEMP, mais, contrairement à elle, elle ne nécessite pas d'étape de reformation des couples fréquentiels. Elle est donc plus robuste en cas de multiples, c'est à dire lorsque certaines composantes ont, une ou plusieurs fois, la même activité fréquentielle sur l'une des dimensions. Nous proposons ici une nouvelle méthode, ESPRIT-2D, qui permet de combiner les avantages des méthodes MEMP et ACMP, c'est à dire précision et estimation directe des paires fréquentielles.

Dans cet article, nous définissons dans un premier temps le

modèle du signal. Puis, nous présentons la nouvelle méthode à haute résolution ESPRIT-2D. Des résultats de simulations illustrent ensuite les performances de cette méthode.

2 Modèle du signal 2D

Chaque pixel $y(m, n)$ de l'image observée correspond à la somme de deux termes :

$$y(m, n) = x(m, n) + b(m, n)$$

où $0 \leq m \leq M - 1$ et $0 \leq n \leq N - 1$.

• $x(m, n)$, le signal utile, est modélisé de la façon suivante :

$$x(m, n) = \sum_{i=1}^K s_i \exp[j2\pi(f_{1i}m + f_{2i}n) + \alpha_{1i}m + \alpha_{2i}n + j\varphi_i].$$

Les K composantes du signal sont définies par les paires fréquentielles normalisées $\{f_{1i}, f_{2i}\}$, les coefficients d'atténuation $\{\alpha_{1i}, \alpha_{2i}\}$, les amplitudes $\{s_i\}$ et les termes de phase $\{\varphi_i\}$.

• $b(m, n)$ est un bruit blanc, gaussien, centré et de variance σ^2 .

Nous nous proposons ici d'estimer les fréquences et les coefficients d'atténuation du signal.

3 La méthode ESPRIT-2D

• Soit \mathbf{R} la matrice de covariance de taille $[PQ, PQ]$ calculée à partir d'une lecture ligne par ligne de l'image :

$$\mathbf{R}_{[PQ, PQ]} = \mathbf{A}_{[PQ, K]} \mathbf{\Psi}_{[PQ, K]}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_{[PQ, PQ]},$$

où H symbolise l'opération transposée conjuguée et \mathbf{I} la matrice identité de taille $[PQ, PQ]$.

$\Psi = \text{diag} \{s_i^2\}_{1 \leq i \leq K}$ et la matrice \mathbf{A} s'écrit :

$$\mathbf{A}_{[PQ,K]} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{[Q,K]}^2 \\ \mathbf{A}_{[Q,K]}^2 \Phi_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{[Q,K]}^2 \Phi_1^{P-1} \end{bmatrix}.$$

$\Phi_1 = \text{diag} \{\exp(j2\pi f_{1i} + \alpha_{1i})\}_{1 \leq i \leq K}$ et \mathbf{A}^2 est la matrice de Vandermonde 1D relative à l'information fréquentielle associée à la seconde dimension spatiale :

$$\mathbf{A}_{[Q,K]}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{21}^{Q-1} & z_{22}^{Q-1} & \dots & z_{2K}^{Q-1} \end{bmatrix},$$

avec $z_{kl} = \exp(j2\pi f_{kl} + \alpha_{kl})$.

Lorsque nous décomposons la matrice de covariance en valeurs propres, nous obtenons la matrice \mathbf{U}_S qui contient les K vecteurs propres associés au sous-espace signal, c'est à dire les vecteurs propres associés aux K plus grandes valeurs propres. Les espaces engendrés par les colonnes des matrices \mathbf{A} et \mathbf{U}_S sont identiques. Il existe donc une matrice inversible \mathbf{T} telle que :

$$\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{U}_S \quad (1)$$

Réalisons deux partitions différentes de la matrice \mathbf{A} que nous appliquons ensuite à la relation (1) :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{[PQ,K]} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_M \\ \text{---} \\ \mathbf{A}_{[Q,K]}^2 \Phi_1^{P-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{[Q,K]}^2 \\ \text{---} \\ \mathbf{A}_M \Phi_1 \end{bmatrix} \\ \left[\begin{bmatrix} \mathbf{A}_M \\ \text{---} \\ \mathbf{A}_{[Q,K]}^2 \Phi_1^{P-1} \end{bmatrix} \right] \mathbf{T} &= \left[\begin{bmatrix} \mathbf{U}_S \\ \text{---} \\ \vdots \end{bmatrix} \right] \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_M \\ \text{---} \\ \mathbf{A}_{[Q,K]}^2 \Phi_1^{P-1} \end{bmatrix}} \right\} \text{Q lignes} \\ \left[\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{[Q,K]}^2 \\ \text{---} \\ \mathbf{A}_M \Phi_1 \end{bmatrix} \right] \mathbf{T} &= \left[\begin{bmatrix} \vdots \\ \text{---} \\ \overline{\mathbf{U}_S} \end{bmatrix} \right] \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{[Q,K]}^2 \\ \text{---} \\ \mathbf{A}_M \Phi_1 \end{bmatrix}} \right\} \text{Q lignes} \end{aligned}$$

Nous obtenons alors les relations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_M \mathbf{T} = \mathbf{U}_S \\ \mathbf{A}_M \Phi_1 \mathbf{T} = \overline{\mathbf{U}_S} \end{cases},$$

ce qui entraîne que :

$$\Phi_1 = \mathbf{T}(\mathbf{U}_S)^{\#} \overline{\mathbf{U}_S} \mathbf{T}^{-1},$$

où $\mathbf{M}^{\#}$ désigne la matrice pseudo-inverse de \mathbf{M} , c'est à dire que $\mathbf{M}^{\#} = (\mathbf{M}^H \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^H$.

Il est alors possible d'estimer les paramètres $\{f_{1i}, \alpha_{1i}\}$ à partir de la matrice Φ_1 qui contient les valeurs propres de $\mathbf{F}_1 = (\mathbf{U}_S)^{\#} \overline{\mathbf{U}_S}$.

- Une lecture colonne par colonne de l'image permet de calculer une nouvelle matrice de covariance \mathbf{R}' telle que :

$$\mathbf{R}'_{[PQ,PQ]} = \mathbf{A}'_{[PQ,K]} \Psi \mathbf{A}'_{[PQ,K]}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_{[PQ,PQ]}.$$

Sa décomposition en valeurs propres conduit à la matrice \mathbf{U}'_S dont les colonnes sont les vecteurs propres associés au sous-espace signal.

Il existe une matrice inversible \mathbf{T}' qui vérifie la relation :

$$\mathbf{A}' \mathbf{T}' = \mathbf{U}'_S \quad (2)$$

et nous pouvons montrer que :

$$\Phi_2 = \mathbf{T}'(\mathbf{U}'_S)^{\#} \overline{\mathbf{U}'_S} \mathbf{T}'^{-1}.$$

Ainsi, la décomposition en valeurs propres de la matrice $\mathbf{F}_2 = (\mathbf{U}'_S)^{\#} \overline{\mathbf{U}'_S}$ peut conduire à Φ_2 et donc aux paramètres $\{f_{2i}, \alpha_{2i}\}$.

Remarque. Soit $\mathbf{E}_{Q,P}$ la matrice de permutation définie par :

$$\mathbf{E}_{Q,P} = \sum_{k=1}^Q \sum_{l=1}^P \mathbf{E}_{k,l}^{Q,P} \otimes \mathbf{E}_{l,k}^{P,Q}$$

où \otimes désigne le produit de Kronecker et $\mathbf{E}_{k,l}^{Q,P}$ la matrice élémentaire de taille $[Q, P]$ ayant la valeur 1 pour les coordonnées (k, l) .

Nous pouvons montrer que :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{E}_{Q,P} \mathbf{A}, \quad (3)$$

et que :

$$\mathbf{U}'_S = \mathbf{E}_{Q,P} \mathbf{U}_S. \quad (4)$$

- La méthode MEMP décompose \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 en valeurs propres et estime séparément Φ_1 et Φ_2 , et donc $\{f_{1i}\}$ et $\{f_{2i}\}$. L'utilisation d'un critère défini par Hua [2] permet ensuite de reformer les couples $\{f_{1i}, f_{2i}\}$.

- La méthode ESPRIT-2D que nous proposons utilise quant à elle la relation supplémentaire :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}'$$

qui fait apparaître un lien entre les matrices \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 , c'est à dire entre Φ_1 et Φ_2 .

Démonstration : les relations (1), (2) et (4) conduisent à l'égalité suivante :

$$\mathbf{A}' \mathbf{T}' = \mathbf{E}_{Q,P} \mathbf{A} \mathbf{T},$$

soit :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{E}_{Q,P} \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{T}'^{-1}.$$

En comparant cette dernière égalité avec la relation (3), nous montrons que $\mathbf{T} \mathbf{T}'^{-1}$ est une matrice identité, et donc que $\mathbf{T} = \mathbf{T}'$. ■

Une première résolution assez simple permet d'obtenir des fréquences et des coefficients d'atténuation ordonnés :

1. nous calculons \mathbf{T} et Φ_1 , et par suite les paramètres $\{f_{1i}, \alpha_{1i}\}$, à partir de la décomposition en valeurs propres de \mathbf{F}_1 :

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{T}^{-1} \Phi_1 \mathbf{T},$$

2. nous appliquons la transformation \mathbf{T} à \mathbf{F}_2 :

$$\Phi_2 = \mathbf{T} \mathbf{F}_2 \mathbf{T}^{-1},$$

afin d'obtenir Φ_2 , et par conséquent les paramètres $\{f_{2i}, \alpha_{2i}\}$.

Dans ce cas, les valeurs propres sont ordonnées de manière identique, c'est à dire que l'élément (i, i) de Φ_1 correspond à la même composante fréquentielle que l'élément (i, i) de Φ_2 . Nous obtenons donc sans étape de reformation des paires les couples $\{f_{1i}, f_{2i}\}$ et $\{\alpha_{1i}, \alpha_{2i}\}$.

Cependant, lorsqu'une valeur propre a une multiplicité supérieure à 1, ses vecteurs propres ne sont plus définis de manière unique. Il en ressort que la transformation \mathbf{T} n'est pas unique et que la solution précédente n'est plus valide.

Nous proposons donc une autre résolution analogue à celle utilisée dans la méthode ACMP pour obtenir des paramètres fréquentiels ordonnés. Les opérations à effectuer sont les suivantes :

1. nous calculons \mathbf{T} à partir de la décomposition en valeurs propres d'une combinaison linéaire de \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 :

$$\beta \mathbf{F}_1 + (1 - \beta) \mathbf{F}_2 = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{T}$$

où le paramètre β est un scalaire,

2. la transformation \mathbf{T} est appliquée à \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 :

$$\Phi_1 = \mathbf{T} \mathbf{F}_1 \mathbf{T}^{-1},$$

$$\Phi_2 = \mathbf{T} \mathbf{F}_2 \mathbf{T}^{-1},$$

nous obtenons ainsi Φ_1 et Φ_2 qui permettent d'estimer les fréquences et les coefficients d'atténuation qui sont alors ordonnés.

Calcul pratique de \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2

Le calcul de \mathbf{F}_1 fait intervenir K vecteurs qui forment la matrice \mathbf{U}_S et qui définissent le sous-espace signal associé à la première dimension. Pour obtenir ces vecteurs, nous calculons la décomposition en valeurs propres de la matrice de covariance \mathbf{R} que nous estimons par :

$$\hat{\mathbf{R}}_{[PQ, PQ]} = \frac{1}{(M - P + 1)(N - Q + 1)} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H.$$

\mathbf{Y} est une matrice de données de taille $[PQ, (M - P + 1)(N - Q + 1)]$ telle que :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_0 & \mathbf{Y}_1 & \cdots & \mathbf{Y}_{M-P} \\ \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \cdots & \mathbf{Y}_{M-P+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{Y}_{P-1} & \mathbf{Y}_P & \cdots & \mathbf{Y}_{M-1} \end{bmatrix}$$

où

$$\mathbf{Y}_m = \begin{bmatrix} y(m, 0) & y(m, 1) & \cdots & y(m, N - Q) \\ y(m, 1) & y(m, 2) & \cdots & y(m, N - Q + 1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(m, Q - 1) & y(m, Q) & \cdots & y(m, N - 1) \end{bmatrix}$$

Nous pouvons également calculer \mathbf{U}_S en utilisant les K principaux vecteurs singuliers de la matrice de données \mathbf{Y} .

Il ne reste plus ensuite qu'à calculer \mathbf{U}'_S en utilisant la relation (4) pour obtenir la matrice \mathbf{F}_2 .

Remarque. Lorsque tous les coefficients d'atténuation du signal sont nuls, nous pouvons construire une nouvelle matrice de données $\tilde{\mathbf{Y}}$. Il est nécessaire que les coefficients d'atténuation soient nuls afin de conserver un sous-espace signal de rang K . L'utilisation de cette matrice de données $\tilde{\mathbf{Y}}$ qui correspond à une prédiction forward-backward permet alors d'augmenter la précision de l'estimation fréquentielle. $\tilde{\mathbf{Y}}$ est définie par :

$$\tilde{\mathbf{Y}} = [\mathbf{Y} \quad \mathbf{J} \mathbf{Y}^* \mathbf{J}].$$

\mathbf{J} est une matrice de permutation ayant des 1 sur l'antidiagonale et des 0 ailleurs, et le symbole $*$ représente l'opération de conjugaison.

4 Simulations

Premièrement, les méthodes MEMP, ACMP ($\alpha = 8$) et ESPRIT-2D ($\beta = 8$) sont comparées du point de vue précision, conformément au tableau 1. La figure 1 met en évidence une précision plus faible pour la méthode ACMP que pour les autres méthodes. Par ailleurs, nous constatons qu'ESPRIT-2D est un peu moins précise que MEMP pour un faible SNR, mais que ces deux méthodes donnent des résultats identiques pour un SNR élevé.

Deuxièmement, une simulation effectuée selon la configuration donnée par le tableau 2 permet de comparer ces trois méthodes du point de vue formation des paires. Les quatre composantes fréquentielles du signal forment un carré dans le domaine fréquentiel, comme le montre la figure 2. Nous considérons que l'estimation est correcte si chaque composante estimée se trouve dans un carré de taille 0.02×0.02 centré sur la valeur exacte. La figure 3 montre, au niveau formation des paires, les bonnes performances d'ACMP et d'ESPRIT-2D, ainsi que l'insuffisance de MEMP, dès lors que le signal présente certaines configurations de multiples.

Lorsque tous les coefficients d'atténuation du signal sont nuls, la méthode 2D Unitary ESPRIT [4] permet d'obtenir directement les paires fréquentielles à partir d'une matrice de données *forward-backward*. Des simulations qui ne figurent pas ici par manque de place montrent des performances identiques pour les méthodes 2D Unitary ESPRIT et ESPRIT-2D (avec matrice de données *forward-backward*), aussi bien au niveau précision de l'estimation qu'au niveau formation des paires fréquentielles.

Références

- [1] P. Vanpoucke, M. Moonen, Y. Berthoumieu, *An efficient subspace algorithm for 2D harmonic retrieval*, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, pp. 461-464, 1994.

[2] Y. Hua, *Estimating two-dimensional frequencies by matrix enhancement and matrix pencil*, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 40, n° 9, pp. 2267-2280, September 1992.

[3] R.H. Roy, A. Paulraj, T. Kailath, *ESPRIT - a subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. 34, n° 4, pp. 1340-1342, 1986.

[4] M. Haardt, M.D. Zoltowski, C.P. Mathews, J.A. Nosssek, *2D Unitary ESPRIT for Efficient 2D Parameter Estimation*, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, pp. 2096-2099, 1995.

fréquences	1 ^{ère} dimension	0,1	0,13
	2 ^{nde} dimension	0,2	0,23
coefficients d'atténuation	1 ^{ère} dimension	0	0
	2 ^{nde} dimension	0	0
amplitudes		1	1
(M,N,P,Q) = (16,16,8,8)			
SNR : 1 → 30dB par pas de 1dB			
Nombre d'itérations par SNR : 200			

TAB. 1 — Conditions de simulation pour la figure 1.

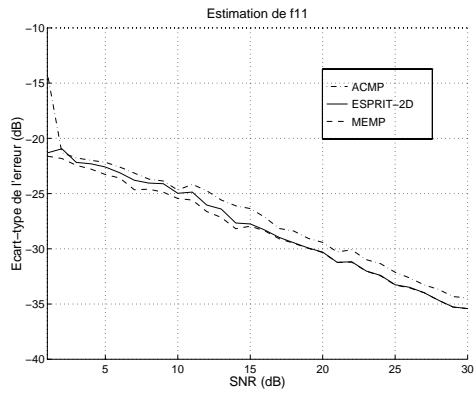


FIG. 1 — Estimation de f_{11} par MEMP, ACMP ($\alpha = 8$) et ESPRIT-2D ($\beta = 8$).

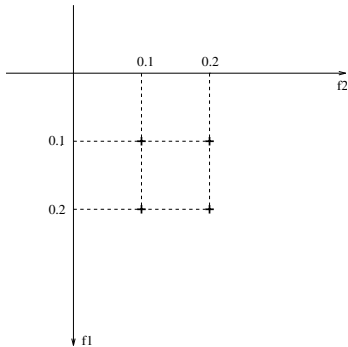


FIG. 2 — Composantes fréquentielles du signal.

fréquences	1 ^{er} axe	0,1	0,1	0,2	0,2
	2 nd axe	0,2	0,1	0,1	0,2
coefficients d'atténuation	1 ^{er} axe	0	0	0	0
	2 nd axe	0	0	0	0
amplitudes		1	1	1	1
(M,N,P,Q) = (20,20,9,9)					
SNR : 5 → 25dB par pas de 1dB					
Nombre d'itérations par SNR : 400					

TAB. 2 — Conditions de simulation pour la figure 3.

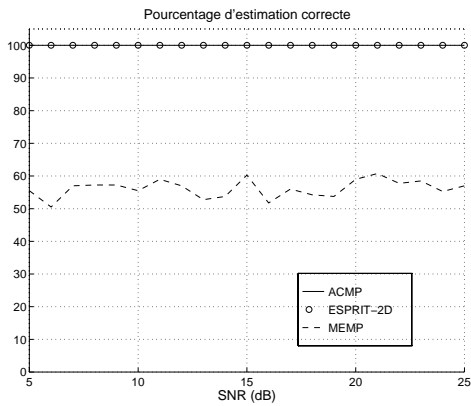


FIG. 3 — Pourcentage d'estimation correcte des fréquences.